HONORIS CAUSA

SECRETO DE LOS NÚMEROS PRIMOS Y LA CONJETURA DE GOLDBACH

SECRET OF PRIME NUMBERS AND THE GOLDBACH CONJECTURE

Nórgida Lina Fermín Alfonzo[1] https://orcid.org/0009-0003-9919-3796

Recibido: 17-01-2025
Aceptado: 03-12-2025

Resumen

Este artículo presenta un estudio empírico de un teorema acerca de los números primos que es poco estudiado: "Todo número primo mayor que 3 equivale a un múltiplo de 6 aumentado o disminuido en una unidad". Este teorema demostrado hace mucho tiempo indica que los números primos se pueden escribir como $6K - 1$ *o* $6K + 1$, con K un número entero positivo; pero, existen muchos valores de K para ambas formas que no generan números primos. Esta investigación se centra en las características o patrones de estos valores K que no generan números primos para las dos formas. La investigación demuestra que estos valores de K son infinitas progresiones aritméticas cuyas razones son números primos menores. Este descubrimiento permite generalizar los números primos a través de una criba con las restricciones de los valores de k; y a su vez, se logra demostrar la Conjetura de Goldbach ("todo número par mayor que 2, puede ser escrito como la suma de dos números primos") con simplicidad de cálculos y a deducir tres corolarios de la misma.

Palabras clave: números primos; números compuestos; progresiones aritméticas; conjetura de Goldbach; números pares.

Abstract

This paper presents an empirical study of a theorem about prime numbers that is little studied: "Every prime number greater than 3 equals a multiple of 6 increased or decreased by one unit." This long-proven theorem indicates that prime numbers can be written as $6K - 1$ *or* $6K + 1$, with k a positive integer, but there are many K-values for both forms that do not generate prime numbers. This research focuses on the characteristics or patterns of these K-values that do not generate prime numbers for the two forms. The research shows that these values of K are infinite arithmetic progressions whose ratios are smaller prime numbers. This discovery allows the generalization of prime numbers through a sieve with the constraints of the values of K; and in turn, it is possible to prove the Goldbach Conjecture ("every even number greater than 2 can be written as the sum of two prime numbers") with simplicity of calculations and to deduce three corollaries from the same values of k are infinite arithmetic progressions whose ratios are smaller prime numbers. This discovery allows the generalization of prime numbers through a sieve with the constraints of the values of k; and in turn, it is possible to prove the Goldbach Conjecture ("every even number greater than 2 can be written as the sum of two prime numbers") with simplicity of calculations and to deduce three corollaries from the same.

Keywords: prime numbers; compound numbers; arithmetic progressions; Goldbach's conjecture; even numbers.

[1] Profesora de Matemática en el CE Instituto Vocacional de Venezuela. Instituto universitario adventista de Venezuela. Nirgua/ Yaracuy. norgida@instivoc.com

Introducción

Los números primos han sido objeto de estudio y fascinación en la teoría de números debido a su relevancia como los "bloques fundamentales" en la construcción del conjunto de los números naturales. Entre estos resultados fundamentales, se encuentra el teorema que afirma que todo número primo mayor que 3 puede expresarse como un múltiplo de 6 aumentado o disminuido en la unidad. Este teorema, aunque simple en apariencia, abre una ventana hacia el análisis de patrones estructurales de los números primos y su relación con aquellos que poseen esta misma forma pero que no son primos.

El presente estudio se enfoca en identificar y analizar los patrones en los números de la forma $6K + 1$ y $6K - 1$ que no son primos, con el objetivo de explorar si estas regularidades pueden contribuir a una generalización que caracterice a los números primos en términos más amplios. Adicionalmente, se examina cómo dichos patrones pueden ofrecer nuevas perspectivas para abordar la histórica Conjetura de Goldbach, la cual plantea que todo número par mayor que 2 puede expresarse como la suma de dos números primos. El enfoque metodológico empleado es de naturaleza inductiva, partiendo de la observación de casos particulares para construir una generalización considerable.

Los números primos

Definición: Se dice que un número entero $p > 1$ es primo si sus únicos divisores son 1 y p, es decir, no existe divisor d de p tal que $1 < d < p$. Si un número $a > 1$ no es primo se dice que es un número compuesto.

Los primeros números primos son: $2,3,5,7,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53, \ldots$

Teorema 1: Todo número primo mayor que 3 equivale a un múltiplo de 6 aumentado o disminuido en una unidad. Es decir que todo número primo $p > 3$, $p = 6K - 1$ o $p = 6K + 1$ con K un número entero positivo.

Demostración

Sea p un número primo mayor que 3, demostraremos que $p = 6K - 1$ o $p = 6K + 1$ con K un número entero positivo.

En efecto dividamos p entre 6, sea K el cociente y r el residuo tendremos

$p = 6K + r$, siendo 6 el divisor, Ver los casos

1. $p = 6K + 0$
2. $p = 6K + 1$

3. $p = 6K + 2$
4. $p = 6K + 3$
5. $p = 6K + 4$
6. $p = 6K + 5$

1. Si $p = 6K + 0$, r no puede ser cero, si fuera cero p sería divisible por seis lo cual no es posible porque p es primo. Luego r puede ser solo 1,2,3,4,5
2. Si $p = 6K + 1\ si\ r = 1$ se tendrá que p es un múltiplo de 6 aumentado en una unidad uno
3. Si $p = 6K + 2 = 2.3K + 2 = 2(3K + 1)$ luego, la suma es divisible por 2 lo cual es imposible porque p es primo.
4. Si $p = 6K + 3 = 3.2K + 3 = 3(2K + 1)$ luego, la suma es divisible por 3 lo cual es imposible porque p es primo.
5. $Si\ p = 6K + 4 = 2.3K + 2.2 = 2(3K + 2)$ luego, la suma es divisible por 2 lo cual es imposible porque p es primo.
6. Si $p = 6K + 5 = 6K + 6 - 1 = 6(K + 1) - 1$ luego p tiene la forma $6K - 1$
7. Luego queda demostrado el teorema. En conclusión, todos los números primos mayores que 3 se pueden clasificar de dos maneras: Los que se pueden escribir de la forma $6K - 1$ como lo son $5, 11, 17, 23, 29, 41$ …. Y los que se pueden escribir como $6K + 1$ como son $7, 13,19,31,37, \ldots$

Ver algunos ejemplos

$5 = 6.1 - 1$

$7 = 6.1 + 1$

$11 = 6.2 - 1$

2. Observaciones acerca del teorema 1

2.1. No todos los valores de K enteros positivos generan números primos para $6K - 1\ y\ 6K + 1$

Tabla I. Números de la forma 6K-1 y 6K+1 ordenados en gráfico que llamaré gráfico de espiga colocada en horizontal, en el tallo se colocan los valores de K , arriba de K el valor de 6K-1 y debajo de k el valor de 6K+1. Resaltado en verde están los números primos

6K-1	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59
6K-1	6*1-1	6*2-1	6*3-1	6*4-1	6*5-1	6*6-1	6*7-1	6*8-1	6*9-1	6*10-1
K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6K+1	6*1+1	6*2+1	6*3+1	6*4+1	6*5+1	6*6+1	6*7+1	6*8+1	6*9+1	6*10+1
6K+1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61

6K-1	65	71	77	83	89	95	101	107	113	119
6K-1	6*11-1	6*12-1	6*13-1	6*14-1	6*15-1	6*16-1	6*17-1	6*18-1	6*19-1	6*20-1
K	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
6K+1	6*11+1	6*12+1	6*13+1	6*14+1	6*15+1	6*16+1	6*17+1	6*18+1	6*19+1	6*20+1
6K+1	67	73	79	85	91	97	103	109	115	121

6K-1	125	131	137	143	149	155	161	167	173	179
6K-1	6*21-1	6*22-1	6*23-1	6*24-1	6*25-1	6*26-1	6*27-1	6*28-1	6*29-1	6*30-1
K	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
6K+1	6*21+1	6*22+1	6*23+1	6*24+1	6*25+1	6*26+1	6*27+1	6*28+1	6*29+1	6*30+1
6K+1	127	133	139	145	151	157	163	169	175	181

6K-1	185	191	197	203	209	215	221	227	233	239
6K-1	6*31-1	6*32-1	6*33-1	6*34-1	6*35-1	6*36-1	6*37-1	6*38-1	6*39-1	6*40-1
K	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
6K+1	6*31+1	6*32+1	6*33+1	6*34+1	6*35+1	6*36+1	6*37+1	6*38+1	6*39+1	6*40+1
6K+1	187	193	199	205	211	217	223	229	235	241

6K-1	245	251	257	263	269	275	281	287	293	299
6K-1	6*41-1	6*42-1	6*43-1	6*44-1	6*45-1	6*46-1	6*47-1	6*48-1	6*49-1	6*50-1
K	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
6K+1	6*41+1	6*42-1	6*43+1	6*44+1	6*45+1	6*46+1	6*47+1	6*48+1	6*49+1	6*50+1
6K+1	247	253	259	265	271	277	283	289	295	301

3. Estudio de los valores de K que no generan números primos para la forma $6K - 1$

Revisar los valores de k que no generan números primos para la forma $6k - 1$. Estos son: 6, 11, 13, 16, 20, 21, 24, 26, 27, 31, 34, 35, 36, 37, 41, 46, 48, 50, 51, 54, 55, 56, 57, 61, 62, 63, 66, 68, 69, 71, 73, 76, 79, 81, 82, 83, 86, 88, 89, 90, 91, 92, 96, 97,101, 102, 104, 105, 106, 111, 112, 115, 116, 118, 119, 121, 122, 123, 125, 126, 128, 129, 130, 131, 132, 134, 136, …

¿Qué tienen en común estos números?

6, ~~11~~, 13, 16, 20, 21, 24, 26, 27, 31, 34, 35, 36, ~~37~~, 41, 46, 48, ~~50~~, 51, 54, 55, 56, 57, 61, 62, ~~63~~, 66, 68, 69, 71, 73, ~~76~~, 79, 81, 82, 83, 86, 88, ~~89~~, 90, 91, 92, 96, 97,101, ~~102~~, 104, 105, 106, 111, 112, ~~115~~, 116, 118, 119, 121, 122, 123, 125, 126, ~~128~~, 129, 130, 131, 132, 134, 136, 139,

Observación 1: Los números que están en rojo: 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61, 66, 71, 76, 81, 86, 91, 96, 101, 106,… tienen en común que todos terminan en 1 y en 6, pero eso no es lo relevante, lo importante es que todos se pueden escribir como $K = 6 + 5n$, que es una Progresión aritmética PA de razón 5. Para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ y podemos demostrar que generan a todos los múltiplos de 5 que tienen la forma $6K - 1$ ¿Qué sucede si se sustituye este valor de $K = 6 + 5n$ en la forma 6K-1?

Véase, la demostración

6(6+5n)-1= Sustituir el valor de K=6+5n en la forma 6K-1
6.6+6.5n -1 =
36 + 6.5n -1 =
35+6.5n =
7.5+6.5n =
5(7+6n)

Como se puede observar el resultado es un múltiplo de 5, es decir queda demostrado que el conjunto de valores de K de la forma $K = 6 + 5n$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots,$ genera a todos los múltiplos de 5 de la forma 6K-1.

Observación 2: Los números que están en sombreado amarillo: 6, 13, 20, 27, 34, 41, 48, 55, 62, 69, 76, 83, 90, 97, 104, 111, 118, 125, 132, 139, 146, 153, 160, 167, 174, 181, 188, 195, 202, 209, 216, 223, 230, … forman una PA de valores de K que se puede escribir de la forma $K = 6 + 7n$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ con razón 7 y afirmo que estos valores generan todos los múltiplos de 7 que tienen la forma $6K - 1$. Ver la demostración

$6(6 + 7n) - 1 =$

$6.6 + 6.7n - 1 =$

$36 + 6.7n - 1 =$

$35 + 6.7n =$

$7.5 + 6.7n =$

$7(5 + 6n)$ $\therefore$ queda demostrado que los valores de $K = 6 + 7n$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ generan los múltiplos de 7 para los números de la forma $6K - 1$.

3.1. Más Progresiones aritméticas que generan números compuestos de la forma $6K - 1$

De la misma manera, como se estudió en la parte anterior. Se puede agregar más Progresiones aritméticas de números K=a+bn, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, forman números compuestos de la forma $6K - 1$ con las siguientes características:

Tabla II. Valores de K que generan números compuestos para la forma 6K - 1

Valores de K (PA) K=a+bn	Sucesión números compuestos de la forma de 6K - 1	6 K – 1 es múltiplo de
6+5n	5(7 + 6n)	5
6+7n	7(5 + 6n)	7
13+11n	11(7 + 6n)	11
11 + 13n	13 (5 + 6n)	13
20 +17n	17(7 + 6n)	17
16 + 19n	19(5 + 6n)	19
27 + 23n	23(7 + 6n)	23
34 + 29n	29(7 + 6n)	29
26 + 31n	31(5 + 6n)	31
31 + 37n	37(5 + 6n)	37

En esta tabla se puede observar algunos patrones:

1. Los valores de K que generan estas sucesiones de números compuestos, tienen la forma $K = a + bn$ donde b es un número primo y $b \geq 5$ y $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, y cada sucesión está formada por los números compuestos de la forma 6K-1 que son múltiplos de b.
2. Las sucesiones de números compuestos encontrados, se pueden clasificar en dos tipos: unas de la forma $b(7 + 6n)$ y las otras de la forma $b(5 + 6n)$.
3. Los números primos b en las sucesiones que generan números compuestos de la forma $b(7 + 6n)$ son los primos de la forma $6k - 1$, es decir, 5, 11, 17, 23,… y los primos b que generan sucesiones de números compuestos de la forma $b(5 + 6n)$ son los números primos que se pueden escribir como $6k + 1$, es decir, 7, 13,19,31,37…
4. Si b es un primo de la forma $6k - 1$entonces a>b; si b es un primo de la forma $6k + 1$, entonces $a < b$.
5. $7 + 6n = 6n + 6 + 1 = 6(n + 1) + 1$. Sea $n + 1 = k'$, entonces $7 + 6n = 6k' + 1$, es decir, $7 + 6n$ es un número de la forma $6k' + 1$.
6. $5 + 6n = 6n + 6 - 1 = 6(n + 1) - 1$. Sea $n + 1 = k'$, entonces $5 + 6n = 6k' - 1$, es decir, $5 + 6n$ es un número de la forma $6k' - 1$.

7. Cuando b es de la forma $6k-1$, el factor con que genera los múltiplos de b de la forma $6K-1$, son de la forma $(6k'+1)$.
8. Cuando b es de la forma $6k+1$, el factor con que genera los múltiplos de b de la forma $6K-1$, son de la forma $(6k'-1)$.
9. En conclusión, los números compuestos de la forma $6K-1$, se obtiene multiplicando un número primo de la forma $6k-1$ por otro (no necesariamente primo) de la forma $6k+1$.
10. Si b es de la forma $6k+1$ los múltiplos de b son $b(7+6n)$, luego para obtener el valor general de a sustituimos $K=a+bn$ en 6K-1 y queda:

$6(a+bn)-1=b(7+6n)$ despejamos a de esta igualdad y queda

$$6(a+bn)=b(7+6n)+1$$
$$(a+bn)=\frac{b(7+6n)+1}{6}$$
$$a=\frac{b(7+6n)+1}{6}-bn$$
$$a=\frac{7b+6bn+1-6bn}{6}$$
$$a=\frac{7b+1}{6}$$

Desde luego, se puede observar que los valores de $K=a+bn$ que generan números compuestos de la forma $6K-1$ cuando b es de la forma 6k-1, es decir, 5,11, 17,.. tienen un valor de $a=\frac{7b+1}{6}$, ver:

Cuando $b=5$

$a=\frac{7.5+1}{6}=\frac{37+1}{6}=\frac{36}{6}=6$ luego $K=6+5n\ con\ n=\ 0,1,2,3,\ldots$, este K genera todos los múltiplos de 5 de la forma $6K-1$

Cuando $b=11$

$a=\frac{7.11+1}{6}=\frac{77+1}{6}=\frac{78}{6}=13$ luego $K=13+11n$ con $n=\ 0,1,2,3,\ldots$; este K genera todos los múltiplos de 11 de la forma $6K-1$, y así sucesivamente…

11. Si b es de la forma $6k+1$ los múltiplos de b son $b(5+6n)$, luego para obtener el valor general de a sustituimos $K=a+bn$ en $6K-1$ y queda:

$6(a+bn)-1=b(5+6n)$ despejar a de esta igualdad y queda

$$a=\frac{5b+1}{6}$$

Desde luego, se puede observar que los valores de $K = a + bn$ que generan números compuestos de la forma $6K - 1$ cuando b es de la forma $6k + 1$, es decir, 7,13, 19,.. tienen un valor de $a = \frac{5b+1}{6}$, véase:

Cuando b=7

$a = \frac{5.7+1}{6} = \frac{35+1}{6} = \frac{36}{6} = 6$ luego $K = 6 + 7n\ con\ n =\ 0,1,2,3, \ldots$, este K genera todos los múltiplos de 7 de la forma $6K - 1$

Cuando $b = 13$

$a = \frac{5.13+1}{6} = \frac{65+1}{6} = \frac{66}{6} = 11$ luego $K = 11 + 13n$ con $n =\ 0,1,2,3, \ldots$; este K genera todos los múltiplos de 13 de la forma $6K - 1$, y así sucesivamente…

12. Los valores obtenidos con $K = a + bn$ de la observación 10 y los de la observación 11 son los mismos.

4. Estudio de los valores de K que no generan números primos para la forma 6K + 1

Observar los valores de K que no generan números primos para la forma $6K + 1$, estos son:
4, 8, 9, 14, 15, 19, 20, 22, 24, 28, 29, 31, 34, 36, 39, 41, 42, 43, 44, 48, 49, 50, 53, 54, 57, 59, 60, 64, 65, 67, 69, 71, 74, 75, 78, 79, 80, 82, 84, 85, 86, 88, 89, 92, 93, 94, 97, 98, 99, 104, 106, 108, 109, 111, 113, 114, 116, 117, 119, 120, 124, 127, 129, 130, 132, 133, 134, 136, 139, …

Realizando observaciones similares a las anteriores se encuentra que:

Observación 1: Los números 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, 49, … es una progresión aritmética de valores de K que se pueden escribir de la forma $K = 4 + 5n\ con\ n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ y forman los múltiplos de 5 para los números de la forma $6K + 1$.

Ver la demostración

$6(4 + 5n) + 1 = \ldots$

$5(5 + 6n)$ $\therefore$ Los valores de $K = 4 + 5n$ con $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ generan todos números de la forma $6K + 1$ que son múltiplos de 5.

Observación 2: Los números 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71, … es una PA de los valores de K que se puede escribir de la forma $K = 8 + 7n\ con\ n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ y razón 7 y forman los múltiplos de 7 para los números de la forma $6K + 1$.

Demostración:

$6(8 + 7n) + 1 = \ldots$

$7(7 + 6n)$ $\therefore$ Los valores de $K = 8 + 7n$ con $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ generan todos números de la forma $6K + 1$ que son múltiplos de 7.

4.1 Más sucesiones de números K que generan números compuestos de la forma $6K + 1$

Análogamente, se encuentra más Progresiones Aritméticas de valores de K que generan números compuestos de la forma $6K + 1$. Ver

Tabla III. Valores de K que generan números compuestos para la forma 6K + 1

Valores de k PA $K = a + bn$	Sucesiones de números compuestos de la forma de $6K - 1$	$6K - 1$ es múltiplo de
4 + 5n	5(5 + 6n)	5
8 + 7n	7(7 + 6n)	7
9 + 11n	11(5 + 6n)	11
15 + 13n	13(7 + 6n)	13
14 + 17n	17(5 + 6n)	17
22 + 19n	19(7 + 6n)	19
19 + 23n	23(5 + 6n)	23
24 + 29n	29(5 + 6n)	29
36 + 31n	31(7 + 6n)	31
43 + 37n	37(7 + 6n)	37

4.2 Patrones observados en la tabla III:

1. Los valores de K que generan estas sucesiones de números compuestos, tienen la forma $K = a + bn$ donde b es un número primo y $b \geq 5$ y $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, y cada sucesión está formada por los números compuestos de la forma 6K + 1 que son múltiplos de b.
2. Las sucesiones de números compuestos encontrados, se pueden clasificar en dos tipos: unas de la forma $b(5 + 6n)$ y las otras de la forma $b(7 + 6n)$.
3. Los números primos b en las sucesiones que generan números compuestos de la forma $b(5 + 6n)$ son los primos de la forma $6k - 1$, es decir, 5, 11, 17, 23,… y los primos b que generan sucesiones de números compuestos de la forma $b(7 + 6n)$ son los números primos que se pueden escribir como $6k + 1$, es decir, 7, 13,19,31,37
4. Si b es un primo de la forma $6k - 1$entonces $a < b$; si b es un primo de la forma $6k + 1$, entonces $a > b$.
5. $7 + 6n = 6n + 6 + 1 = 6(n + 1) + 1$. Sea $n + 1 = k'$, entonces $7 + 6n = 6k' + 1$, es decir, $7 + 6n$ es un número de la forma $6k + 1$.

6. $5+6n = 6n+6-1 = 6(n+1) - 1$. Sea $n+1 = k'$, entonces $5+6n = 6k'-1$, es decir, $5+6n$ es un número de la forma $6k-1$.
7. Cuando b es de la forma $6k-1$, el factor con que genera los múltiplos de b de la forma $6K+1$, son de la forma $(6k'-1)$.
8. Cuando b es de la forma $6k+1$, el factor con que genera los múltiplos de b de la forma $6K+1$, son de la forma $(6k'+1)$.
9. En conclusión, los números compuestos de la forma $6K+1$, se obtiene multiplicando un número primo de la forma $6k-1$ por otro (no necesariamente primo) de la misma forma y un número primo de la forma $6k+1$ por otro (no necesariamente primo) de la misma forma.
10. Si b es de la forma $6k-1$ los múltiplos de b son $b(5+6n)$, luego para obtener el valor general de a sustituimos $K = a+bn$ en $6K+1$ y queda:

$6(a+bn)+1 = b(5+6n)$ despejamos a de esta igualdad y queda

$$a = \frac{5b-1}{6}$$

Desde luego, podemos observar que los valores de $K = a+bn$ que generan números compuestos de la forma $6K+1$ cuando b es de la forma $6k-1$, es decir, 5,11, 17,.. tienen un valor de $a = \frac{5b-1}{6}$, veámoslo:

Cuando $b = 5$

$a = \frac{5.5-1}{6} = \frac{25-1}{6} = \frac{24}{6} = 4$ luego $K = 4+5n \; con \; n = 0,1,2,3, \ldots$, este K genera todos los múltiplos de 5 de la forma $6K+1$

Cuando $b = 11$

$a = \frac{5.11-1}{6} = \frac{55-1}{6} = \frac{54}{6} = 9$ luego $K = 9+11n \; con \; n = 0,1,2,3, \ldots$; este K genera todos los múltiplos de 11 de la forma $6K+1$, y así sucesivamente…

11. Si b es de la forma $6k+1$ los múltiplos de b son $b(7+6n)$, luego para obtener el valor general de a sustituimos $k = a+bn$ en $6K+1$ y queda:

$6(a+bn)+1 = b(7+6n)$ despejamos a de esta igualdad y queda

$$a = \frac{7b-1}{6}$$

Desde luego, se puede observar que los valores de $K = a + bn$ que generan números compuestos de la forma $6K + 1$ cuando b es de la forma $6k + 1$, es decir, 7,13, 19,.. tienen un valor de $a = \frac{7b-1}{6}$, véase:

Cuando b=7

$a = \frac{7.7-1}{6} = \frac{49-1}{6} = \frac{48}{6} = 8$ luego $K = 8 + 7n \; con \; n =$ 0,1,2,3, ... este K genera todos los múltiplos de 7 de la forma $6K + 1$

Cuando b=13

$a = \frac{7.13+1}{6} = \frac{91-1}{6} = \frac{90}{6} = 15$ luego $K = 15 + 13n \; con \; n =$ 0,1,2,3, ...; este K genera todos los múltiplos de 13 de la forma $6K + 1$, y así sucesivamente…

Con el estudio realizado en la parte 3 y parte 4 se puede concluir que los números primos se pueden obtener con la siguiente fórmula o criba:

$$\{2,3\} \cup \begin{cases} p \in \mathbb{Z}^+ \Big/ \begin{matrix} p = 6K - 1, \;\; K \geq 1 \; y \\ K \neq a + bn \; con \; a, b \in \mathbb{Z}^+, b < K, \\ b \; es \; primo \; y \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{matrix} \begin{cases} Si \; b \; es \; primo \; de \; la \; forma \; 6k - 1, \\ a > b \; y \; a = \dfrac{7.b + 1}{6} \\ o \\ Si \; b \; es \; primo \; de \; la \; forma \; 6k + 1, \\ a < b \; y \; a = \dfrac{5.b + 1}{6} \end{cases} \\ p \in \mathbb{Z}^+ \Big/ \begin{matrix} p = 6K + 1, \;\; K \geq 1 \; y \\ K \neq a + bn \; con \; a, b \in \mathbb{Z}^+, b < K, \\ b \; es \; primo \; y \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{matrix} \begin{cases} Si \; b \; es \; primo \; de \; la \; forma \; 6k - 1, \\ a < b \; y \; a = \dfrac{5.b - 1}{6} \\ o \\ Si \; b \; es \; primo \; de \; la \; forma \; 6k + 1, \\ a > b \; y \; a = \dfrac{7.b - 1}{6} \end{cases} \end{cases}$$

Nota: Para conocer los números primos mayores que 3 y menores o igual a un número N dado, basta con Estudiar los valores de $K \leq N/6$. Luego $a + bn < N/6$ despejando n queda de cada caso será:

1. Si se estudia el caso de $6K - 1$, se tiene dos opciones si b es de la forma $6k - 1$es decir, 5,11,17,23.. o si b es de la forma $6k + 1$ es decir, 7,13,19,31,. En el primer caso $a = (7b + 1)/6$

Entonces $a + bn \leq N/6$

$$((7.b + 1)/6) + bn \leq N/6$$

$$(\frac{7.b+1+6bn}{6}) \leq N/6$$
$$b(7+6n)\ +1\ \leq\ N$$
$$b(7+6n)\ \leq\ N-1$$
$$7+6n \leq \frac{N-1}{b}$$
$$6n \leq \frac{N-1}{b}-7$$
$$6n \leq \frac{N-1-7b}{b}$$
$$n \leq \frac{N-1-7b}{6b}$$

$n\ \leq\ \frac{N-7b-1}{6b}$ y despejando b quedarà

$$(\frac{7.b+1}{6}) + bn\ \leq\ N/6$$
$$(\frac{7.b+1+6bn}{6})\ \leq\ N/6$$
$$b(7+6n)\ +1\ \leq\ N$$
$$b(7+6n)\ \leq\ N-1$$

$b\ \leq\ (\frac{N-1}{7+6n})$ el mayor valor de b es cuando $n=0$ por lo tanto $b\ \leq\ (\frac{N-1}{7})$

En el segundo caso si b es de la forma $6k+1$ es decir, 7,13,19,31,. El valor de $a=\frac{5.b+1}{6}$ luego

$$K\ \leq\ N/6.$$
$$a+bn\ \leq\ N/6$$
$$((5.b+1)/6)\ +\ bn\ \leq\ N/6$$

Despejando b queda

$b\ \leq \frac{N-1}{5+6n})$ el mayor valor de b es cuando $n=0$ por lo tanto $b\ \leq\ (\frac{N-1}{5})$

Despejando n queda

$$((5.b+1)/6)\ +\ bn\ \leq\ N/6$$
$$n\ \leq\ \frac{N-5b-1}{6b}$$

Nota: Usando los valores del primer caso se obtienen los mismos números compuestos del segundo caso.

2. Si se estudia el caso de $6K+1$, se tendrán dos opciones si b es de la forma $6k-1$es decir, 5,11,17,23.. o si b es de la forma $6k+1$ es decir, 7,13,19,31,. Realizando un estudio similar al anterior se concluyen los siguientes despejes:

Ver el primer caso si b es de la forma $6k-1$ luego $a=\frac{5.b-1}{6}$

$$K\ \leq\ N/6.$$
$$a+bn\ \leq\ N/6$$

((5.b-1)/6) + bn ≤N/6
Despejando b queda

$b \leq \frac{N+1}{5+6n}$ el mayor valor de b es cuando $n = 0$ por lo tanto $b \leq (\frac{N+1}{5})$

Despejando n queda

$$n \leq \frac{N - 5b + 1}{6b}$$

Segundo caso si $b = 6k + 1$ es decir, 7,13,19,31,

$K \leq N/6.$

Despejando b queda

$b < (\frac{N+1}{7+6n})$ el mayor valor de b es cuando $n = 0$ por lo tanto $b \leq (\frac{N+1}{7})$

despejando n queda

$$Kn \leq \frac{N - 7b + 1}{6b}$$

Materiales y Métodos

La presente investigación sobre los números primos se desarrolla a partir de un enfoque inductivo, utilizando la observación de casos particulares para establecer generalizaciones y detectar patrones estructurales en números de la forma 6K+1 y 6K−1.

Materiales Utilizados

- **Teoría de Números:** Propiedades básicas de los números primos y su distribución, análisis del teorema que establece que todo número primo mayor que 3 es de la forma 6K±1, identificación de números no primos dentro de estas categorías y sus posibles patrones.
- **Herramientas Computacionales:** Programa de **Exel** para realizar simulaciones numéricas y verificar patrones en conjuntos grandes de números y la aplicaciones de pruebas de primalidad **Prime Numbers** .
- **Fuentes Bibliográficas:** Artículos científicos y libros especializados en teoría de números y conjeturas matemáticas y estudios previos sobre la distribución de los números primos y la Conjetura de Goldbach.

Método de Investigación

- **Observación Inductiva de Casos Particulares:** Se han examinado valores de N en rangos de 3000 para evaluar la recurrencia de los números primos en la forma 6K±1 y se ha identificado la estructura de los números no primos dentro de estas categorías y analizado patrones comunes entre ellos.

- **Generalización de Patrones:** partir de los datos obtenidos en la observación, se han formulado un modelo algebraico que caracteriza a los números primos y a partir de la generalización de los números primos se ha demostrado la conjetura de Goldbach y se ha generado 3 corolarios a partir de la misma y se han demostrado cada uno de ellos.

Resultados o hallazgos

5. Teorema planteado

Teorema 2:

Todo número primo mayor que 3 equivale a un múltiplo de 6 aumentado o disminuido en una unidad. Es decir que todo número primo p >3 , p = 6K-1 o p= 6K+1 con K un número entero positivo, siempre que:

- *Para* $6K - 1$: $K \neq a + bn$ *con* $a, b \in \mathbb{Z}^+, b < K$, b *primo y* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *; si b es un primo de la forma 6k-1, a>b y* $a = \frac{7.b+1}{6}$ *o bien, si b es un primo de la forma* $6k+1, a < b$ *y* $a = \frac{5.b+1}{6}$.
- *Para 6K+1:* $K \neq a + bn$ *con* $a, b \in \mathbb{Z}^+, b < K$, b *primo y* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *; si b es un primo de la forma 6k – 1,* $a < b$ *y* $a = \frac{5.b-1}{6}$ *o si b es un primo de la forma* $6k + 1, a > b$ *y* $a = \frac{7.b-1}{6}$.

Demostración

Con el teorema 1 queda claro que los números primos mayores que 3 tienen dos formas de escribirse estas son $6K - 1$ y $6K + 1$. Pero también, que hay números de esas dos formas que no son primos, estos serían los números que resulten del producto de un primo de la forma $6k - 1$ por otro (no necesariamente primo) de la forma $6k + 1$ y viceversa, y uno de la forma $6k - 1$ por otro igual (no necesariamente primo), y uno de la forma $6k + 1$ por otro igual (no necesariamente primo).

Ver el primer caso para la forma 6k -1

Sea $K = a + bn$ con $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ con b primo de la forma $6k - 1$, es decir, 5,11,17, 23,…; $b < K$, $a > b$ y $a = \frac{7.b+1}{6}$. *Si sustituimos* $K = \frac{7.b+1}{6} + bn$ *en la forma* $6K - 1$ *quedará*

$$6(\frac{7.b+1}{6}+bn)-1 = 7b+1+6bn-1$$
$$= 7b + 6bn$$
$$= b(7 + 6n)$$

Recordar que b es primo de la forma $6k-1$, luego para ese valor de K los múltiplos de b serán de la forma $(6k-1)(7+6n)$. Con n= 0,1,2,3,… Es decir, para ese valor de K, la forma $6K-1$ es un múltiplo de b. Por lo tanto, ese valor de K no genera números primos para la forma $6K-1$.

Ver el segundo caso para la forma 6K -1

Sea $K = a + bn$ con n = 0, 1, 2, 3, … con b primo de la forma $6k+1, b < K$ es decir, 7,13,19; $a < b\ y\ a = \frac{5.b+1}{6}$ ..*Si sustituimos* $K = \frac{5.b+1}{6} + bn$ *en la forma* $6K-1$ *quedará*:

$$6(\frac{5.b+1}{6}+bn)-1 = 5b + 1 + 6bn - 1$$
$$= 5b + 6bn$$
$$= b(5 + 6n)$$

Recordar que b es primo de la forma $6k+1$, luego para ese valor de K los múltiplos de b serán de la forma $(6k+1)(5+6n)$ con n= 0,1,2,3,… Es decir, para ese valor de K, la forma $6K-1$ es un múltiplo de b. Por lo tanto, ese valor de K no genera números primos para la forma $6K-1$.

Véase el primer caso para la forma 6K +1

Sea $K = a + bn\ con\ n = 0,1,2,3, \ldots$ con b primo de la forma $6k-1$, es decir, 5,11,17, 23,…; $b < K,\ a < b\ y\ a = \frac{5.b-1}{6}$.

Al sustituir $K = \frac{5.b-1}{6}$ *+ bn en la forma 6K +1 quedará:*

$$6(\frac{5.b-1}{6}+bn)+1 = 5b-1+6bn+1$$
$$= 5b + 6bn$$
$$= b(5+6n)$$

Como que b es primo de la forma $6k-1$, luego para ese valor de K los múltiplos de b serán de la forma $(6k-1)(5+6n)on\ n = 0,1,2,3, \ldots$ Es decir, para ese valor de K, la forma $6K+1$ es un múltiplo de b. Por lo tanto, ese valor de K no genera números primos para la forma $6K+1$.

Véase el segundo caso para la forma $6K+1$

Sea $K = a + bn\ con\ n = 0,1,2,3, \ldots$ con b primo de la forma $6k+1$, es decir, 7,13,19;

$b < K, \quad ,a > b \; y \; a = \dfrac{7.b-1}{6}$

Si se sustituye $K = \frac{7.b-1}{6} + bn$ *en la forma* $6K+1$ *quedará:*

$$6(\frac{7.b-1}{6} + bn) + 1 = 7b - 1 + 6bn + 1$$

$$= 7b + 6bn$$

$$= b(7 + 6n)$$

Siendo que b es primo de la forma $6k+1$, luego para ese valor de K los múltiplos de b serán de la forma $(6k+1)(7+6n) con\ n = 0,1,2,3,\ldots$ Es decir, para ese valor de K, la forma $6K+1$ es un múltiplo de b. Por lo tanto, ese valor de K no genera números primos para la forma $6K+1$.

Con la demostración del teorema 1 (ya conocido) se ha visto que todos los números primos mayores que 3 se pueden escribir como $6K+1 \; o \; 6K-1$ con K un número entero positivo. Y con el teorema 2 planteado, se ha encontrado las excepciones de K que no generan números primos para esas dos formas, y con estas demostraciones se tiene una criba que deja filtrar los números primos. Y queda demostrado que: los números primos se pueden obtener con la siguiente fórmula o criba:

$$\{2,3\} \cup \left\{ \begin{array}{l} p \in \mathbb{Z}^+ \Big/ \begin{array}{c} p = 6K-1, \;\; K \geq 1 \; y \\ K \neq a + bn \; con \; a, b \in \mathbb{Z}^+, b < K, \\ b \;\; primo \; y \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{array} \left\{ \begin{array}{c} Si\ b\ es\ primo\ de\ la\ forma\ 6k-1, \\ a > b \; y \; a = \dfrac{7.b+1}{6} \\ o \\ Si\ b\ es\ primo\ de\ la\ forma\ 6k+1, \\ a < b \; y \; a = \dfrac{5.b+1}{6} \end{array} \right. \\ \\ p \in \mathbb{Z}^+ \Big/ \begin{array}{c} p = 6K+1, \;\; K \geq 1 \; y \\ K \neq a + bn \; con \; a, b \in \mathbb{Z}^+, b < K, \\ b \;\; primo \; y \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{array} \left\{ \begin{array}{c} Si\ b\ es\ primo\ de\ la\ forma\ 6k-1, \\ a < b \; y \; a = \dfrac{5.b-1}{6} \\ o \\ Si\ b\ es\ primo\ de\ la\ forma\ 6k+1, \\ a > b \; y \; a = \dfrac{7.b-1}{6} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

5. Uso de la criba para hallar números primos menores que un número dado

Para determinar los números primos mayores que 3 menores que un N cualquiera se procede de la siguiente manera: Se hallan los valores de $6K-1$ y $6K+1$ hasta $K \leq N/6$. Luego se descartan los siguientes valores:

Para descartar los valores 6K-1 que no son primos

1. **Primer caso**: *hallar los múltiplos de los primos b (b de la forma* $6k-1$*) con la fórmula* $b(7+6n)$ *dando valores a b desde 5 hasta* $b \leq (\frac{N-1}{7})$ $y\, n \leq \frac{N-7b-1}{6b}$;

2. **Segundo caso:** hallar los múltiplos de los primos b (b de la forma $6k+1$) con la fórmula $b(5+6n)$ *dando valores a b desde 7 hasta* $b \leq (\frac{N-1}{5})$ $y\ n \leq \frac{N-5b-1}{6b}$

Para descartar los valores 6k+1 que no son primos

1. **Primer caso:** hallar los múltiplos de los primos b (b de la forma $6k-1$) con la fórmula $b(5+6n)$ *dando valores a b desde 5 hasta* $b \leq \frac{N+1}{5}$ $y\, n \leq \frac{N-5b+1}{6b}$; Como b es de la forma $6k-1$ si $k=h$, n se comienza a estudiar desde $n=h-1$y se deja de estudiar hasta el máximo valor de n para dicho b con la fórmula $n \leq \frac{N-5b+1}{6b}$. El estudio termina cuando para un $k=h$ el máximo valor de n es igual al mínimo , es decir, el estudio comienza con $n=h-1$ y termina con $n=h-1$.

2. **Segundo caso**: hallar los múltiplos de los primos b de la forma $6k+1$ con la fórmula $b(7+6n)$ dando valores a b desde 7 hasta $b \leq (\frac{N+1}{7})$ $y\, n \leq \frac{N-7b+1}{6b}$; Como b es de la forma $6k+1$ si $k=h$, n se comienza a estudiar desde n=h-1y se deja de estudiar hasta el máximo valor de n para dicho b con la fórmula $n \leq \frac{N-7b+1}{6b}$. El estudio termina cuando para un $k=h$ el máximo valor de n es igual al mínimo , es decir, el estudio comienza con $n=h-1$ y termina con $n=h-1$.

Aproximación algebraica de la Conjetura de Goldbach

La Conjetura de Goldbach es una de las conjeturas más famosas en la teoría de números. Fue propuesta por el matemático prusiano Christian Goldbach en 1742 y afirma que:

Conjetura de Goldbach: Todo número par mayor que 2, puede ser escrito como la suma de dos números primos.

Demostración: Sean los números primos mayores que 3. Estos pueden representarse en una de las dos formas congruenciales:

p≡±1(mod6), es decir, p=6K−1 o p=6K+1 para algu´n entero K

Según los Teoremas 1 y 2, se impone una condición adicional sobre los valores de K, definidos por expresiones del tipo: $K \neq a+bn, con\ a=(7b \pm 1)/6\ o\ (5b \pm 1)/6$, según corresponda a la forma del primo b.

Los números primos no incluidos en el teorema 1 y 2 son los números 2 y 3.

Ver los casos

Sea un número par N mayor que 3, N se puede escribir como la suma de dos números primos, Ver los casos

- $N = 2 + 2 = 4$ es par
- $N = 2 + 3 = 5$ no es par
- $N = 3 + 3 = 6$ es par
- La suma de 2 y el resto de primos mayores que 3 tampoco es par ya que un impar mas 2 será otro impar. Ver: Un impar $2n + 1$ le sumamos 2 será $N = (2n + 1) + 2 = 2n + 2 + 1 = 2(n + 1) + 1$ es impar.

Ver los demás casos., $3 + (6K - 1), 3 + (6K + 1), (6K - 1) + (6K' - 1), (6K - 1) + (6K' + 1), (6K + 1) + (6K' + 1)$.

- $N = 3 + (6K - 1) = 6K - 2 = 2(3K - 1)$ es par
- $N = 3 + (6K + 1) = 6K + 4 = 2(3K + 2)$ es par
- $N = (6K - 1) + (6K' - 1) = 6(K + K') - 2 = 2([3(K + K') - 1]$ es par
- $N = (6K - 1) + (6K' + 1) = 6(K + K') = 2([3(K + K')]$ es par
- $N = (6K + 1) + (6K' + 1) = 6(K + K') + 2 == 2([3(K + K') + 1]$es par.

Todas estas sumas son pares, por lo que se cumple que la suma de dos primos de estas formas genera un número par.

Si asumimos la infinitud de primos en ambas clases congruenciales y los valores de K compatibles según las restricciones dadas por los Teoremas 1 y 2, entonces cualquier número par mayor que 6 puede expresarse como la suma de dos números primos bajo alguna de las combinaciones descritas arriba. Por lo tanto cualquier número par mayor que 2 , puede ser escrito como la suma de dos números primos. Estos son:

- $4 = 2 + 2$
- $6 = 3 + 3$

Los demás números pares mayores que 6 pueden ser escritos de una o más de las siguientes maneras

- $3 + (6K - 1)\ con\ K \neq a + bn\ con\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ con\ b\ primo\ de\ la\ forma\ 6k - 1, b < K,\ a > b\ \ a = \frac{7.b+1}{6}\ \ y\ \ K \neq a + bn\ con\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ con\ b\ primo\ de\ la\ forma\ 6k + 1,\ a < b\ y\ a = \frac{5.b+1}{6}$
- $3 + (6K + 1)\ con\ K \neq a + bn\ con\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ con\ b\ primo\ de\ la\ forma\ 6k - 1, b < K,\ a < b\ y\ a = \frac{5.b-1}{6}.\ Y\ \ K \neq$

$a + bn \; con \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \; con \; b \; primo \; de \; la \; forma \; 6k + 1, b < K, \; , a > b \; y \; a = \frac{7.b-1}{6}$.

- $(6K - 1) + (6K' - 1) \; con \; K \; y \; K' \neq a + bn \; con \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \; con \; b \; primo \; de \; la \; forma \; 6k - 1, b < K, \; a > b \; a = \frac{7.b+1}{6} \; y \; K \neq a + bn \; con \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \; con \; b \; primo \; de \; la \; forma \; 6k + 1, \; a < b \; y \; a = \frac{5.b+1}{6}$
- $(6K - 1) + (6K' + 1) \; con \; K \neq a + bn \; con \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \; con \; b \; primo \; de \; la \; forma \; 6k - 1, b < K, \; a > b \; a = \frac{7.b+1}{6} \; y \; K \neq a + bn \; con \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \; con \; b \; primo \; de \; la \; forma \; 6k + 1, \; a < b \; y \; a = \frac{5.b+1}{6} \; y \; K' \neq a + bn \; con \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \; con \; b \; primo \; de \; la \; forma \; 6k - 1, b < K', \; a < b \; y \; a = \frac{5.b-1}{6}. \; Y \; K' \neq a + bn \; con \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \; con \; b \; primo \; de \; la \; forma \; 6k + 1, b < K', \; , a > b \; y \; a = \frac{7.b-1}{6}$.
- $(6K + 1) + (6K' + 1) \; con \; K \; y \; K' \neq a + bn \; con \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \; con \; b \; primo \; de \; la \; forma \; 6k - 1, b < K, \; a < b \; y \; a = \frac{5.b-1}{6}. \; Y \; K \; y \; K' \neq a + bn \; con \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \; con \; b \; primo \; de \; la \; forma \; 6k + 1, b < K, \; , a > b \; y \; a = \frac{7.b-1}{6}$.

Y así queda demostrada la Conjetura de Goldbach.

Ver los primeros ejemplos en la siguiente tabla

Tabla IX. Números pares del 8 al 100, escritos como suma de dos números primos

	PRIMOS	PARES	OBS: Despues del par 8 este genera los pares de 6 en 6 dondek ≠ a + bn con n = 0, 1, 2, 3, … con b primo de la forma 6k-1, b<k, a >b a= (7.b+1)/6 y k≠ a + bn con n = 0, 1, 2, 3, … con b primo de la forma 6k+1, a<b y a= (5.b+1)/6		OBS: Genera los números pares a partir de 10 de 6 en 6 con k ≠ a + bn con n = 0, 1, 2, 3, … con b primo de la forma 6k-1, b<k, a<b y a=(5.b-1)/6. Y k ≠ a + bn con n = 0, 1, 2, 3, … con b primo de la forma 6k+1, b<k, ,a>b y a= (7.b-1)/6 .		OBS: generan los números pares a partir de 10 de 6 en 6 con k y k´≠ a + bn con n = 0, 1, 2, 3, … con b primo de la forma 6k-1, b<k, a >b a= (7.b+1)/6 o k≠ a + bn con n = 0, 1, 2, 3, … con b primo de la forma 6k+1, a<b y a= (5.b+1)/6		OBS: generan los números pares a partir de 12 de 6 en 6 con k≠ a + bn con n = 0, 1, 2, 3, … con b primo de la forma 6k-1, b<k, a >b a= (7.b+1)/6 o k≠ a + bn con n = 0, 1, 2, 3, … con b primo de la forma 6k+1, a<b y a= (5.b+1)/6 y k´ ≠a + bn con n = 0, 1, 2, 3, … con b primo de la forma 6k-1, b<k´, a<b y a=(5.b-1)/6. Y k´ ≠ a + bn con n = 0, 1, 2, 3, … con b primo de la forma 6k+1, b<k´, ,a>b y a= (7.b-1)/6 .		OBS: generan los números pares a partir de 14 de 6 en 6 con k y k´≠ a + bn con n = 0, 1, 2, 3, … con b primo de la forma 6k-1, b<k, a<b y a=(5.b-1)/6. Y k y k´≠ a + bn con n = 0, 1, 2, 3, … con b primo de la forma 6k+1, b<k, ,a>b y a= (7.b-1)/6 .	
N			3+(6*k -1)		3+(6*k +1)		(6*k-1)+(6*k´-1)		(6*k-1)+(6*k´+1)		(6*k+1)+(6*k´+1)	
1												
2	2	2										
3	3											
4		4										
5	5											
6		6										
7	7											
8		8	3+(6*1-1)	3+5								
9												
10		10			3+(6*1+1)	3+7	(6*1-1)+(6*1-1)	5+5				
11	11											
12		12							(6*1-1)+(6*1+1)	5+7		
13	13											
14		14	3+(6*2 -1)	3+11							(6*1+1)+(6*1+1)	7+7
15												
16		16			3+(6*2 +1)	3+13	(6*1-1)+(6*2-1)	7+11				
17	17											
18		18							(6*1-1)+(6*2+1)	5+13		
									(6*2-1)+(6*1+1)	11+7		
19	19											
20		20	3+(6*3 -1)	3+17							(6*1+1)+(6*2+1)	7+13
21												
22		22			3+(6*3 +1)	3+19	(6*1-1)+(6*3-1)	5+17				

8. ¿Se puede decir algo más acerca de la conjetura de Goldbach?

- **Corolario 1:** El numero 8 se puede escribir en forma única como $3 + (6K - 1)$ con $K = 1\ esto\ es\ 3 + 5$ y Los números pares a partir de 14 de 6 en 6 se pueden escribir como la suma de dos números primos de la forma $3 + (6K - 1)\ con\ K \neq a + bn\ con\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ con b primo de la forma $6k - 1, b < K,\ a > b\ a = \frac{7.b+1}{6}\ y\ K \neq a + bn\ con\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ con b primo de la forma $6k + 1,\ a < b\ y\ a = \frac{5.b+1}{6}$ o bien de la forma $(6K + 1) + (6K' + 1)\ con\ K\ y\ K' \neq a + bn\ con\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ con b primo de la forma $6k - 1, b < K,\ a < b\ y\ a = \frac{5.b-1}{6}.\ Y\ K\ y\ K' \neq a + bn\ con\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ con b primo de la forma $6k + 1, b < K\ , a > b\ y\ a = \frac{7.b-1}{6}$.

Demostración

Caso 1

Sean $6k - 1$ un numero primo, debe demostrar que $3 + (6K - 1) = 14 + 6m$

Ver $3 + (6K - 1) = 6K + 2$

$$= 6K + 2 + 12 - 12$$
$$= 6K + 14 - 12$$
$$= 6(K - 2) + 14$$

$= 14 + 6m\ con\ m = K - 2.$ y esta es una progresión aritmética que comienza con 14 y tiene razón 6. Con las condiciones de K para que $6K - 1$ sea primo y $k > 1$.

Caso 2

Sean $6K + 1\ y\ 6K' + 1$ números primos demostrar que $(6K + 1) + (6K' + 1) = 14 + 6m$

Ver

$(6K + 1) + (6K' + 1) = 6K + 6K' + 2$

$$= 6K + 6K' + 2 + 12 - 12$$
$$= 6(K + K' - 2) + 14$$

$= 14 + 6m\ con\ m = K + K' - 2$ con $K\ y\ K' > 0$ y esta es una progresión aritmética que comienza con 14 y tiene razón 6.Con las condiciones de K para que $6K - 1$ sea primo y $K > 0$. Queda demostrado el corolario 1.

- **Corolario 2:** Los números pares a partir de 10 de 6 en 6 se pueden escribir de la forma $\mathbf{3 + (6K + 1)}\ K \neq a + bn\ con\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ con b primo de la forma $6k - 1, b < K,\ a < b\ y\ a = \frac{5.b-1}{6}.\ \ Y\ \ K\ y\ K' \neq a + bn\ con\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ con b primo de la forma $6k+1, b<K,\ ,a>b\ y\ a=\frac{7.b-1}{6}$. **o bien de la forma** $(\boldsymbol{6K-1})+(\boldsymbol{6K'-1})$ con $K\ y\ K' \neq\ a\ +\ bn\ con\ n\ =\ 0,1,2,3,\ldots$ con b primo de la forma $6k-1, b<K$, $a\ >b\ \ a=\frac{7.b+1}{6}\ \ y\ \ K\neq\ \ a\ +\ bn\ con\ n\ =\ 0,1,2,3,\ldots$ con b primo de la forma $6k+1,\ a<b\ y\ \ a=\frac{5.b+1}{6}$

Demostración

Caso 1

Sean $6k+1$ un numero primo, debemos demostrar que $3+(6K+1)\ =\ 10\ +6m$

Ver $3+(6K+1)\ =\ 6K\ +\ 4$

$$
\begin{aligned}
&=\ 6K\ +4+6-6\\
&=6K\ +10\ -6\\
&=6(K-1)\ +\ 10\\
&=\ 10\ +\ 6m\ con\ m=K-1
\end{aligned}
$$

. y esta es una progresión aritmética que comienza con 10 y tiene razón 6, con las condiciones de K para que $6K+1$ sea primo y $K>0$

Caso 2

Sean $6K+1\ y\ 6K'+1$ números primos demostrar que $(6K+1)+(6K'+1)\ =\ 10\ +6m$

Ver

$$
\begin{aligned}
(6K-1)+(6K'-1)\ &=\ 6K+6K'-2\\
&=\ 6K+6K'-2\ +12-12\\
&=6(K+K'-2)+10\\
&=\ 10+6m\ con\ m=\ K+K'-2\ \ con\ K\ y\ K'>0
\end{aligned}
$$

y esta es una progresión aritmética que comienza con 10 y tiene razón 6, con las condiciones de K y K´ para que $6K-1y\ 6K'-1$ sean primos y $K\ y\ K'>0$. Queda demostrado el corolario 2.

- **Corolario 3:** Los números pares a partir de 12 de 6 en 6 se pueden escribir de la forma $(6K-1)+(6K'+1)\ con\ K\neq\ a\ +\ bn\ con\ n\ =\ 0,1,2,3,\ldots$ con b primo de la forma $6k-1,\ b<K,\ a\ >b\ \ a=\frac{7.b+1}{6}\ \ y\ \ K\neq\ \ a\ +\ bn\ con\ n\ =\ 0,1,2,3,\ldots$ con b primo de la forma $6k+1,\ a<b\ y\ a=\frac{5.b+1}{6}\ y\ K'\ \neq a\ +\ bn\ con\ n\ =\ 0,1,2,3,\ldots$ con b primo de la forma $6k-1, b<K',\ a<b\ y\ a=\frac{5.b-1}{6}$. $Y\ \ K'\ \neq\ a\ +\ bn\ con\ n\ =\ 0,1,2,3,\ldots$ con b primo de la forma $6k+1, b<K',\ ,a>b\ y\ a=\frac{7.b-1}{6}$.

Demostración

Sean $6K-1\ y\ 6K'+1$ números primos demostrar que $(6K-1)+(6K'+1)\ =\ 12\ +6m$

$$Veamos$$

$$\begin{aligned}(6K-1)+(6K'+1) &= 6K+6K' \\ &= 6K+6K'+12-12 \\ &= 6(K+K'-2)+12 \\ &= 12+6m \; con \; m = K+K'-2 \;\; con \; K \; y \; K' > 0\end{aligned}$$

y esta es una progresión aritmética que comienza con 12 y tiene razón 6, con las condiciones de K y K´ para que $6K-1 y\ 6K'+1$ sean primos y $K\ y\ K' > 0$. Queda demostrado el corolario 3.

Discusión

En el desarrollo de la presente investigación, se ha establecido un método de criba que permite extender la definición y caracterización de los números primos, proporcionando un marco teórico que permite abordar la demostración de la conjetura de Goldbach. Durante la implementación del procedimiento, se realizó una discriminación sobre los valores de k y k", lo que asegura la validez de los resultados obtenidos. No obstante, los valores de n no fueron discriminados, lo que permite la aparición de valores repetidos dentro del conjunto analizado. A pesar de ello, esta repetición no impacta la integridad de los hallazgos, ya que la estructura de la criba y las relaciones matemáticas establecidas preservan la coherencia lógica de los resultados.

Adicionalmente, la formulación del presente estudio ha dado lugar a la aparición de un conjunto de ecuaciones diofánticas específicas. Se plantea que el análisis detallado de estas ecuaciones, junto con la exploración de métodos eficientes para su resolución, podría derivar en el desarrollo de un algoritmo práctico capaz de determinar la primalidad de cualquier número entero positivo de manera sistemática.

Conclusiones o Reflexiones

La presente investigación ha desarrollado un método de criba que generaliza los números primos y aporta un marco teórico que logra la demostración de la conjetura de Goldbach. Además, la aparición de ecuaciones diofánticas específicas sugiere la posibilidad de diseñar un algoritmo eficiente para determinar la primalidad de los números enteros, En futuras investigaciones, sería conveniente estudiar estrategias óptimas para la resolución de estas ecuaciones diofánticas, considerando tanto métodos algebraicos como numéricos, con el fin de determinar patrones que faciliten la verificación de la primalidad de los números enteros.

Referencias

Apostol, T. (1984) *Introducción a la teoría analítica de los números*. Editorial Reverté. Caracas. Venezuela.

Baldor, A. (1944). *Aritmética teórico-practica. Habana , Cuba* : Cultural,SA.

Castellano, Z (2022) *Criba eficiente secuencia de raíz digital tesla Zollner números primos y compuestos*. TECSZOLL. C.A. Valencia Venezuela. https://www.researchgate.net/publication/364039609_TEST_DE_PRIMALIDAD_DE_SECUENCIA_PRIMORDIAL_TESLA_ZOLLNER_NUMEROS_PRIMOS_Y_COMPUESTOS

Guevara Bravo, J. César y Ojeda Uresti, Juan. (2006). ¿Formuló Goldbach la conjetura de Goldbach? *Ciencias* 81, enero-marzo, 72-79. https://www.revistacienciasunam.com/es/54-revistas/revista-ciencias-81/349-iformulo-goldbach-la-conjetura-de-goldbach-.html

Granville A. y Martin G. (2005). Carrera de números primos. El diablo de los números. *LA GACETA DE LA RSME, 8*(1), 197–240.
https://matematicas.uam.es/~franciscojavier.cilleruelo/Curso/Carreras.pdf (Posible: Revisar)

Mora, W. (2010) Introducción a la teoría de números. Ejemplos y algoritmos. *Revista digital Matemática Educación e Internet*. Segunda Edición. Costa Rica. www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/

Niven, I. y Zuckerman, H. (1976) *Introducción a la teoría de los números*. Editorial Limusa . México